

5ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1. Να δείξετε, αποκλειστικά με χρήση του ορισμού, ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 97x + 103$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$.

2. Να δείξετε, αποκλειστικά με χρήση του ορισμού, ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3$ είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$. [Υπόδειξη: Ακολουθήστε τα ίδια βήματα που ακολουθήσαμε στην απόδειξη για τη συνέχεια της συνάρτησης $g(x) = x^2$. Θα χρειαστεί η ταυτότητα $a^3 - \beta^3 = (a - \beta)(a^2 + a\beta + \beta^2)$.]

3. Να εξετάσετε τη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \begin{cases} 25, & \text{αν } x < 3 \\ x^2, & \text{αν } x \geq 3 \end{cases}$

ως προς τη συνέχεια, σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

4. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής ώστε $f(x) = 5$ για κάθε $x \in \mathbb{Q}$. Δείξτε ότι $f(x) = 5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. [Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε με κατάλληλο τρόπο την αρχή της μεταφοράς]

5. Να εξεταστεί αν είναι αληθής ή ψευδής καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις (Αν είναι αληθής να την αποδείξετε, αν είναι ψευδής βρείτε κατάλληλο αντιπαράδειγμα). Έστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- (i) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής τότε η συνάρτηση $|f|$ είναι συνεχής.
- (ii) Αν η συνάρτηση $|f|$ είναι συνεχής τότε η συνάρτηση f είναι συνεχής.
- (iii) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής τότε η συνάρτηση f^2 είναι συνεχής.
- (iv) Αν η συνάρτηση f^2 είναι συνεχής τότε η συνάρτηση f είναι συνεχής.
- (v) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ασυνεχείς παντού, τότε η $f + g$ είναι ασυνεχής.
- (vi) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ασυνεχείς παντού, τότε η fg είναι ασυνεχής.